

```

56645 DATA @@@
56650 :
56700 REM 3: 'DU'-ANTWORT
56705 DATA DU,27
56710 DATA "ICH BIN VOELLIG UNWICHTIG."
56715 DATA "ICH KANNST DU GERN VERGESSEN."
56720 DATA "ICH BIN DOCH NICHT DAS 'THEMA'."
56725 DATA "LASS RUHIG MICH AUS DEM SPIEL."
56730 DATA "WIR WOLLTEN DOCH NICHT UEBER MICH(6SPACE)REDEN."
56735 DATA &
56740 :
56745 DATA ROESE,28
56750 DATA "ABER, ICH BITTE DICH!","BEISS DICH ZUSAMMEN!"
56755 DATA "BIST DU DOCH NICHT IN ERNST, ODER?"
56760 DATA "SO WAS SAGT MAN DOCH NICHT!!"
56765 DATA "WAS FICHT DICH PLOETZLICH AN?"
56770 DATA &
56775 DATA @@@
56780 :
56800 REM 4: AUSSAGEN
56810 DATA GRUSS,29
56820 DATA "ICH FUECHTE, DU HAST VORHIN(11SPACE)GESCHLAFEN."
56830 DATA "HABEN WIR UNS NICHT SCHON BEGRUESST?"
56840 DATA "ICH SAG GERN AUCH EIN ZWEITES MAL(6SPACE)'GUTEN TAG!'"
56850 DATA &
56860 DATA ABSCHIED,30
56870 DATA "KIEDERSEHEN, +NAME.", "ADE.", "TSCHESSLE.", "ADIEU."
56880 DATA "BU GEHST SCHON? DA DANN, BU KIEDER-(3SPACE)SEHEN, +NAME."
56890 DATA &
56900 DATA AUSRUF,31
56910 DATA "NIMM'S NICHT SO SCHWER.", "ES SIEHT SCHLIMMER AUS, ALS ES IST!"
56920 DATA "IST ALLES HALB SO SCHLIMM.", "NUR BUT!"
56930 DATA "KEINE ANGST! BU WIRST ES SCHAFFEN.", "NIMM'S NICHT SO TRAGISCH."
56940 DATA &
56950 DATA JA,32
56955 DATA "SCH SO.", "NUN JA ...", "GUT.", "SCHON.", "DANN BIN ICH BERUHIGT."
56960 DATA &
56965 DATA NEIN,33
56970 DATA "ICH SO?", "NUN DENN...", "NEIN?", "SCHAD DRUM.", "WIE DU WILLST!"
56975 DATA "DANN HAT NICHTS MACHEN.", "JA JA, WAS SOLL'S ..."
56980 DATA &
56985 DATA DANK,39
56990 DATA "BITTE.", "BITTE SEHR.", "ABER FUEHRE DICH TU ICH DOCH ALLES."
56995 DATA "BITTE SCHON.", "ICH BIN DIR IMMER GERN BEIFLICH."
56995 :
56995 :
57000 REM 5: WEISS NICHT
57010 DATA WEISSNICHT,34
57020 DATA "KEINE BUNNUNG.", "DARUEBER WEISS ICH LEIDER NICHTS."
57030 DATA "JA BIN ICH UEBERFRAGT.", "JA MUSST DU SCHON EINEN EXPERTEN FRAGEN."
57040 DATA "ICH WEISS EINE GANZE MENGE, ABER DAS(3SPACE)LEIDER NICHT, +NAME."
57050 DATA "DANN HAB ICH NIE WAS GEBOERT."
57060 DATA "DIT MIR LEID, WEISS ICH NICHT."
57065 DATA "WENN ICH DAS WUESSTE ...", "DAS IST EINE GUTE FRAGE, BLOSS ..."
57070 DATA &
57080 DATA @@@
57090 :
57100 REM 6: VERSTEH NICHT
57110 DATA VERSTEHNICHT,35
57120 DATA "WIE BITTE?", "WAS HAST DU GESAGT?"
57130 DATA "SENZEHUNG, ICH HAB WOHL(RIGHT)GRAD(106SPACE)GESCHLAFEN."
57140 DATA "KÖNNTEST DU DAS NOCH MAL IN ANDERN(4SPACE)WORTEN SAGEN?"
57150 DATA "ICH VERSTEH IMMER NUR BAHNHOF..."
57160 DATA "WAS MEINST DU DAMIT?"
57170 DATA "WIELLEICHT SOLLTEST DU DICH EINFACHER(2SPACE)AUSDRUECKEN."
57180 DATA "ICH VERSTEH NICHT GANZ - KÖNNTEST DU(2SPACE)DAS NOCH EINMAL ANDER
S SAGEN?"
57190 DATA "WAS MEINST DU MIT: '+FRAGE'???"

```

```

57400 DATA "WAS HEISST '+FRAGE'???"
57410 DATA "'+FRAGE' - DAS VERSTEH ICH NICHT."
57420 DATA &
57430 DATA @@@
57440 :
57500 REM 7: THEMA VERFEHLT
57510 DATA THEMAVERFEHLT,36
57520 DATA "WEISST DU UEBERHAUPT NOCH, WORUEBER DU REDEST?"
57530 DATA "DAST WOHL DAS 'THEMA' VERGESSEN!?"
57540 DATA "WENN ICH MICH RECHT ERINNERE, WOLLTEN WIR UEBER 'COMAL' REDEN!"
57550 DATA "SOAUL WAR UNSER 'THEMA', VERGESSEN?"
57560 DATA "WORUEBER REDEST DU EIGENTLICH?"
57570 DATA "VERGISS DAS 'THEMA' NICHT!"
57580 DATA "'SOAUL' IST UNSER 'THEMA'."
57590 DATA "BITTE LASS UNS BEIM 'THEMA' BLEIBEN."
57600 DATA &
57610 DATA @@@
57620 :
57680 REM 8: ABBRECHEN
57690 DATA ABBRUCH,37
57700 DATA "ICH GLAUBE, ES HAT KEINEN SINN, MIT DIRUEBER 'COMAL' ZU REDEN."
57710 DATA "WIR VERSTEHEN UNS HEUTE OFFENBAR NICHT."
57720 DATA "ES HAT KEINEN ZWECK MIT UNS HEIDEN!"
57730 DATA &
57740 DATA @@@
57750 :
57760 REM ABSCHIEDSKOMMENTAR
57770 DATA ENDE,38
57780 DATA "ICH HAB MICH GERN MIT DIR UNTERHALTEN, +NAME."
57790 DATA "HAT MICH GEFREUT, DICH KENNENZULERNEN."
57800 DATA "BESUCH MICH MAL WIEDER, +NAME."
57810 DATA "ICH HAETT MICH GERN NOCH LAENGER MIT(4SPACE)DIR UNTERHALTEN."
57820 DATA "SCHAD, DASS DU SCHON GEHST, +NAME."
57830 DATA &
57840 DATA @@@
57850 :
57860 REM FRAGEPRONOMEN
57870 DATA WER,WAS,WANN,WARUM,WIESO,WIE,WEM,WEN,WELCH,WESSEN,WOHER,WO,&
57880 :
57890 REM ENDE DATENMODUL
57900 :
57910 REM INFORMATIONSMODUL
57920 REM .....
57930 REM FRAGE- UND ANWORTTYPEN
57940 :
57950 REM NR EINGABETYP ANWORTTYP
57960 REM .....
57970 REM 1: W-FRAGE FAKTENANWORT
57980 REM 2: JA/NEIN-FR JA/NEIN-ANTW
57990 REM 3: ENTH 'DU' 'DU'-ANTWORT
58000 REM 4: AUSSAGE AUSSAGE
58010 REM 5: WEISS NICHT WEISS NICHT
58020 REM 6: VERSTEH NICHT VERSTEH NICHT
58030 REM 7: THEMA VERFEHLT THEMA VERFEHLT
58040 REM 8: ABBRUCH ABBRUCH

```

Listing 1. »Comalchen« (Schluß)

Streifzüge durch die Grafikwelt

(Teil 5)

Erinnern Sie sich an die Definition einer Matrix aus der letzten Folge? Da hatten wir festgestellt, daß eine Matrix einfach eine geordnete rechteckige Darstellung von Elementen, beispielsweise von Zahlen ist. Nichts hindert uns also daran, auch die Koordinaten eines Punktes (siehe Bild 1) als eine Matrix aufzufassen.

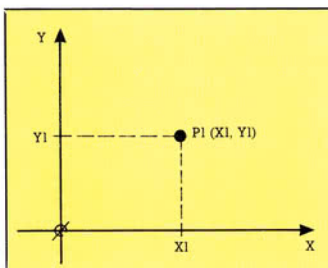


Bild 1. Der Punkt P1 im Koordinatensystem

Einem Punkt P1 (X1,Y1) entspricht also eine 1,2-Matrix, nämlich (X1 Y1)

In dieser Folge werden wir die Früchte zu ernten beginnen, deren Samen wir in der Vergangenheit durch die Erklärung der Matrizen gesät haben. Anhand eines einfachen Beispiels sehen wir uns einige Transformationen auf dem Bildschirm an.

Nun können wir ausprobieren, was geschieht, wenn wir diese kleine Matrix allerlei Rechenreihen aussetzen.

Skalieren

Was passiert, wenn wir die 1,2-Matrix eines Punktes mit einer 2,2-Matrix malnehmen? Bild 2 zeigt Ihnen ein Beispiel.

P1 ist unser Punkt, E die 2,2-Matrix. Das Ergebnis ist wieder eine 1,2-Matrix. Durch die Multiplikation ist P1 gar nicht verändert worden! Wir haben

$$P1 = (X1 \ Y1) \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P1 \cdot E = (X1 \ Y1)$$

Bild 2. Multiplikation von P1 mit der Matrix E

hier eine besondere Matrix gewählt, nämlich die sogenannte Einheitsmatrix, die auch als E bezeichnet wird. Eine Einheits-

matrix erkennt man immer an zwei Kriterien: Es ist eine quadratische Matrix, also eine, bei der die Anzahl der Zeilen und Spalten gleich ist, und sie enthält auf der Diagonalen von links oben nach rechts unten nur Einsen, während alle anderen Elemente gleich Null sind.

Sehen wir uns mal eine andere 2,2-Matrix an, die wir T1 nennen. Bild 3 zeigt Ihnen, was hier die Multiplikation erzeugt.

$$P1 = (X1 \ Y1) \quad T1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P2 = P1 \cdot T1 = (2 \cdot X1 \ Y1)$$

Bild 3. P1 wird mit der Matrix T1 malgenommen

P2 — der Punkt, der sich aus der Multiplikation P1*T1 ergibt — hat doppelt so große X-Koordinaten als P1. Setzen wir statt

der 2 in T1 nun 0,5 ein, dann ergeben sich halbierte X-Werte. Probieren Sie es einmal aus!

Die 2,2-Matrix T1 ist das, was wir in den letzten Folgen angekündigt haben: eine Transformationsmatrix. Eine sehr einfache zwar, aber immerhin wissen Sie nun, wie man durch Multiplikation einer Punktmatrix mit einer Transformationsmatrix eine Transformation ausführen kann. Ein und denselben Punkt P1 können wir nun als P2 in Koordinatensystemen mit gestreckter oder auch gestauchter X-Achse darstellen.

Vermutlich ahnen Sie schon, wie man dasselbe nun auch mit der Y-Achse durchführen kann. Bild 4 zeigt es Ihnen an einem Beispiel.

$$P1 = (X1 \ Y1) \quad T2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X1 \ Y1 \ X12 \ Y12$$

$$P2 = P1 \cdot T2 = (X1 \ 2 \cdot Y1)$$

Bild 4. Die Skalierung der Y-Achse

$P2 = P1 \cdot T2$ ergibt also die Verdoppelung der Y-Koordinate, wenn das Element in Zeile 2, Spalte 2 der Transformationsmatrix eine 2 ist. Man nennt diese Art der Transformation, die wir nun mit X und auch mit Y ausgeführt haben, eine Skalierung. Der Name rührt einfach von den Skalen her, mit denen Koordinatenkreuze unterteilt werden können. Mittels Skalierung ist schon eine große Hürde genommen, die auf dem Weg von Weltkoordinaten zu Bildschirmkoordinaten liegt. Sie erinnern sich vielleicht an die dritte Folge, wo wir am Beispiel des Architekten das Problem erläutert hatten. Wie kann er den Grundriß eines Hauses, das eine Ausdehnung von 15 mal 18 Metern hat, auf den Bildschirm unseres Computers bringen? Die Lösung bringen unsere Skalierungs-Transformationen. Wie das genau funktioniert werden wir nachher an Beispiel-Programmen herausfinden.

Zuvor wollen wir aber noch klären, was zu tun ist, wenn sowohl in X- als auch in Y-Richtung skaliert werden muß. Das wird ohnehin meistens der Fall sein. T1 hatten wir die Transformationsmatrix genannt, die in X-Richtung skalierte, T2 war die für die Y-Achse. Wir können beide Rechnungen nacheinander ausführen. Dann steht für die X-Skalierung:

$$P2 = P1 \cdot T1$$

und für die Y-Richtung anschließend:

$$P3 = P2 \cdot T2$$

Setzen wir den Ausdruck für

P2 in die zweite Gleichung ein, dann ergibt sich:

$$P3 = P1 \cdot T1 \cdot T2$$

In der letzten Folge hatten wir zwar festgestellt, daß man die Reihenfolge der Faktoren bei einer Matrizenmultiplikation nicht vertauschen darf; andererseits gilt aber das sogenannte Assoziativgesetz. Man kann also folgendes tun:

$$A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

Es spielt dabei keine Rolle, ob man zuerst P1 mit T1 multipliziert und dieses Ergebnis dann mal T2 oder ob man zuerst T1 mal T2 rechnet und das Ergebnis dann als 2. Faktor bei der Multiplikation mit P1 verwendet. Das erlaubt uns die Berechnung einer allgemeinen Skalierungsmatrix in der sowohl die X- als auch die Y-Richtung gleichzeitig erfaßt werden. Bild 5 zeigt uns an unseren obigen Beispielen, wie eine solche Skalierungsmatrix durch Bilden von $T1 \cdot T2$ entsteht.

$$T2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad T1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = T1 \cdot T2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bild 5. Die Bildung einer gemeinsamen Skalierungsmatrix für die X- und die Y-Achse

Halten wir nun fest, wie eine allgemeine Skalierungsmatrix aussehen muß, die wir für jeden vorkommenden Fall anwenden können (siehe Bild 6).

$$S = \begin{pmatrix} SX & 0 \\ 0 & SY \end{pmatrix}$$

Bild 6. Die Skalierungsmatrix S

Dabei ist SX der Skalierungsfaktor der X-Achse und SY der in Y-Richtung. Damit sollen die Skalierungen erst einmal beiseitegelegt werden. Behalten Sie die Matrix S im Gedächtnis. Wir werden sie später wieder hervorholen.

Rotation

Außer der Skalierung sind es noch zwei Veränderungen von grafischen Abbildungen, die uns interessieren werden: die Rotation und die Translation. Unter Translation versteht man einfach die Verschiebung eines Koordinatensystems, unter Rotation

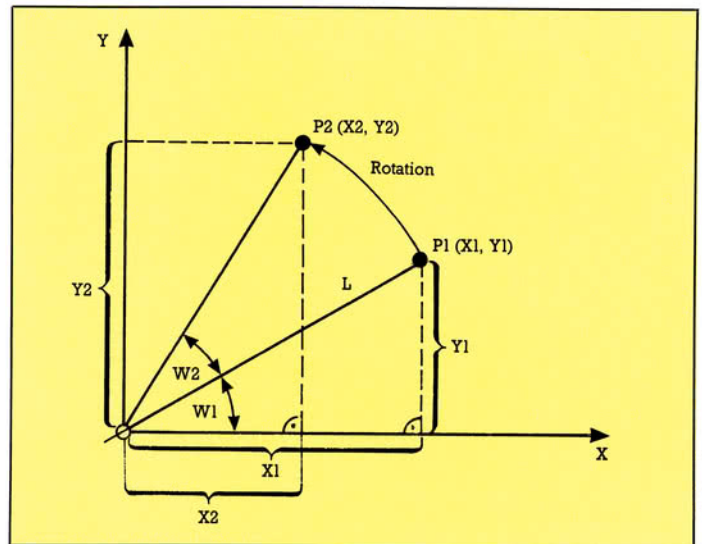


Bild 7. Rotieren eines Punktes P1 um den Winkel w2

tion aber die Drehung. Zur Translation kommen wir gleich. Beginnen wir zunächst einmal mit der Rotation.

Ein Hinweis sei all jenen gegeben, die nur noch den Schatten einer Erinnerung (oder auch diesen nicht mehr) davon haben, was eigentlich Sinus und Cosinus bedeuten. Es gibt drei Wege dieses Kapitel über Rotationen anzugehen: 1. Sie beherrschen die Winkelfunktionen. Dann lesen Sie einfach weiter. 2. Sie erinnern sich noch schwach, wollen aber gerne wissen, wie es funktioniert. Dann lesen Sie zuerst den Kasten, in dem Sinus und Cosinus erklärt werden und danach hier weiter. 3. Sie wissen nichts mehr von Winkelfunktionen und es interessiert Sie auch nicht. Dann geben Sie sich einfach mit der am Ende dieses Abschnittes gezeigten Rotationsmatrix zufrieden. Begreifen Sie in diesem Fall einfach Sinus und Cosinus als die beiden Basic-Funktionen SIN(...) und COS(...) unseres Computers.

Sehen wir uns zunächst einmal an, was bei einer Rotation geschieht. Bild 7 zeigt die Verhältnisse für den Fall einer Rotation um den Ursprungspunkt (also den Punkt 0,0).

Ein Punkt P1 mit den Koordinaten X1 und Y1 ist durch Rotation um den Winkel w2 überführt worden in einen Punkt P2 (Koordinaten X2 und Y2). Uns interessiert, wie man die neuen Koordinaten X2 und Y2 aus den alten berechnen kann. Die Entfernung L des Punktes vom Koordinaten-Ursprung 0 ist konstant geblieben. Vor der Rotation kann man für Sinus und Cosinus schreiben:

$$\text{SIN}(w1) = Y1/L \text{ und } \text{COS}(w1) = X1/L$$

Daraus folgt durch Umstellen der Gleichungen:

$$Y1 = L \cdot \text{SIN}(w1) \text{ und } X1 = L \cdot \text{COS}(w1)$$

Das behalten wir erst einmal

im Gedächtnis und sehen uns nun die Verhältnisse nach der Rotation an. Aus w1 ist nun die Winkelsumme w1+w2 geworden. Für den Sinus und den Cosinus kann man nun schreiben:

$$\text{SIN}(w1+w2) = Y2/L \text{ und } \text{COS}(w1+w2) = X2/L$$

Nach dem Umstellen ergibt sich hier ähnlich wie vorhin:

$$Y2 = L \cdot \text{SIN}(w1+w2) \text{ und } X2 = L \cdot \text{COS}(w1+w2)$$

Kluge Mathematiker haben sich den Kopf zerbrochen und schließlich festgestellt, daß man für den Sinus einer Winkelsumme auch schreiben kann:

$$\text{SIN}(w1+w2) = \text{COS}(w2) \cdot \text{SIN}(w1) + \text{SIN}(w2) \cdot \text{COS}(w1)$$

Analog dazu fanden sie für den Cosinus:

$$\text{COS}(w1+w2) = \text{COS}(w2) \cdot \text{COS}(w1) - \text{SIN}(w2) \cdot \text{SIN}(w1)$$

Diese beiden Beziehungen setzen wir in die von uns gefundenen für Y2 und X2 ein und erhalten auf diese Weise:

$$Y2 = L \cdot (\text{COS}(w2) \cdot \text{SIN}(w1) + \text{SIN}(w2) \cdot \text{COS}(w1))$$

$$\text{und } X2 = L \cdot (\text{COS}(w2) \cdot \text{COS}(w1) - \text{SIN}(w2) \cdot \text{SIN}(w1))$$

Das Auflösen der äußeren Klammer liefert uns:

$$Y2 = \text{COS}(w2) \cdot \text{SIN}(w1) \cdot L + \text{SIN}(w2) \cdot \text{COS}(w1) \cdot L$$

$$\text{und } X2 = \text{COS}(w2) \cdot \text{COS}(w1) \cdot L - \text{SIN}(w2) \cdot \text{SIN}(w1) \cdot L$$

Nun holen wir uns wieder die vorhin im Gedächtnis behaltenen Gleichungen für Y1 und X1 hervor. Wenn Sie genau hinschauen stellen Sie fest, daß wir diese Beziehungen jeweils zweimal pro Gleichung enthalten finden (beispielsweise in der Gleichung für Y2 am Ende des ersten Summanden. Hier steht $\text{SIN}(w1) \cdot L$, was ja Y1 entspricht). Wir verwenden also diese Einsetzungsmethode und gelangen so zu:

$$Y2 = \text{COS}(w2) \cdot Y1 + \text{SIN}(w2) \cdot X1$$

$$\text{und } X2 = \text{COS}(w2) \cdot X1 - \text{SIN}(w2) \cdot Y1$$

Damit haben wir nun zwei Gleichungen, die es uns erlauben, für jeden Punkt P1 mit den Koordinaten X1 und Y1 nach einer Drehung um den Winkel w2 die neuen Koordinaten X2 und Y2 zu berechnen. Nun können Sie das mit den Kenntnissen über die Matrizenmultiplikation einmal nachprüfen: Dasselbe Ergebnis folgt nämlich auch aus der Multiplikation der Punktmatrix (X1 Y1) mit einer Transformationsmatrix R (also P1*R). Sehen Sie dazu Bild 8.

$$(X_2 \ Y_2) = (X_1 \ Y_1) \cdot \begin{pmatrix} \cos(w_2) & \sin(w_2) \\ -\sin(w_2) & \cos(w_2) \end{pmatrix}$$

Bild 8. Diese Transformation führt zur Berechnung der Punktkoordinaten nach einer Rotation

R ist die sogenannte Rotationsmatrix, die wir uns gut merken sollten (siehe Bild 9).

$$R = \begin{pmatrix} \cos(w_2) & \sin(w_2) \\ -\sin(w_2) & \cos(w_2) \end{pmatrix}$$

Bild 9. Die Rotationsmatrix R

R in Bild 9 ist die allgemeine Rotationsmatrix, die in dieser Form für jeden Winkel w2 angewendet werden kann. w2 wird positiv gerechnet bei Drehungen gegen den Uhrzeigersinn, negativ aber bei solchen im Uhrzeigersinn. Handelt es sich also um eine negative Rotation, dann erhält man für R einen Ausdruck, wie ihn Bild 10 zeigt.

$$R = \begin{pmatrix} \cos(-w_2) & \sin(-w_2) \\ -\sin(-w_2) & \cos(-w_2) \end{pmatrix}$$

Bild 10. Die Rotationsmatrix bei einer Drehung mit dem Uhrzeigersinn

Man kann sich in einem solchen Fall wieder einige mathematische Erkenntnisse zunutze machen, die Winkelfunktionen negativer Winkel betreffen. Es gilt nämlich: $\cos(-w_2) = \cos(w_2)$ und $\sin(w_2) = -\sin(w_2)$

Damit vermeiden wir negative Winkel. Die veränderte Rotationsmatrix für Drehungen im Uhrzeigersinn zeigt Ihnen dann Bild 11.

$$R = \begin{pmatrix} \cos(w_2) & -\sin(w_2) \\ \sin(w_2) & \cos(w_2) \end{pmatrix}$$

Bild 11. Die veränderte Rotationsmatrix für Drehungen mit dem Uhrzeigersinn

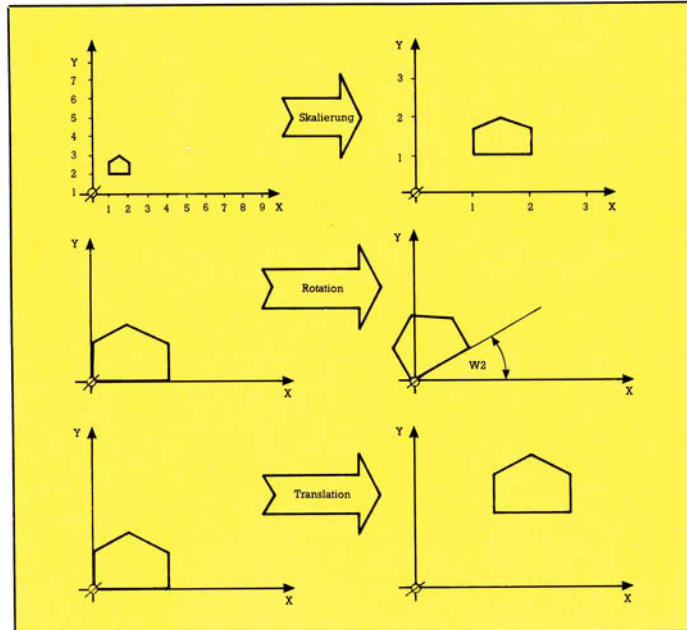


Bild 12. Die drei Arten der Transformation

Jetzt kennen wir die Matrizen zur Skalierung und zur Rotation. Die dritte Manipulation von Punkten wäre die Verschiebung oder Translation, der wir uns nun zuwenden.

Translation

Damit Sie sich die Unterschiede aller drei Operationen, die wir behandeln, auch vorstellen können, sind sie in Bild 12 einmal aufgeführt.

Um eine Verschiebung in der Fläche durch Transformationen ausdrücken zu können, braucht man anstelle der bislang verwendeten 2,2-Matrizen eine 3,3-Matrix. Weil wir später – und da liegt überhaupt der Vorteil dieser Methode – auch Kombinationen dieser Transformationen (beispielsweise kann man dann eine Drehung, eine Skalierung und eine Translation mittels einer einzigen Matrix ausführen) durchführen werden, ist es sinnvoll, auch die bisher gefundenen Matrizen S und R als 3,3-Matrix zu schreiben. Ebenso werden die Punkte nun durch drei Angaben statt wie bisher nur durch zwei (nämlich X1, Y1) beschrieben. Aber immer der Reihe nach.

Für die Punkte erfindet man noch einen Dummywert (also einen Wert, der lediglich für die Bequemlichkeit der Rechnung geschaffen wird, der aber keine konkrete Bedeutung hat). Wir nennen ihn w. Unser Punkt

P1: (X1 Y1) heißt nun P1: (X1*w Y1*w w)

Idealerweise hat w einfach den Wert 1. Sie werden sich vielleicht daran erinnern, daß man bei der Matrizenmultiplikation auf die Anzahl der Zeilen und

Spalten achten mußte. Das allein ist der Grund, der dieses w erforderlich macht. Wie sehen nun S und R als 3,3-Matrizen aus?

Man kann eine Matrix erweitern ohne ihren Wert zu verändern, indem man eine Zeile und eine Spalte hinzufügt, die nur Nullen enthalten. In der Diagonalen kommt dann noch eine 1 dazu. Bild 13 zeigt Ihnen das an unserer Skalierungsmatrix.

$$S = \begin{pmatrix} SX & 0 & 0 \\ 0 & SY & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bild 13. Die Skalierungsmatrix als 3,3-Matrix

Bild 14 soll Ihnen die Vorgehensweise zeigen, mit der nun gerechnet wird.

$$\begin{array}{l} P1 = (X1 \cdot w \ Y1 \cdot w \ w) \\ P2 = P1 \cdot S \\ S = \begin{pmatrix} SX & 0 & 0 \\ 0 & SY & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c|ccc} & SX & 0 & 0 \\ \hline X1 \cdot w & SX \cdot X1 \cdot w & SY \cdot Y1 \cdot w & w \end{array} \\ P2 = (SX \cdot X1 \cdot w \ SY \cdot Y1 \cdot w \ w) \\ P2 = (SX \cdot X1 \quad SY \cdot Y1) \end{array}$$

Bild 14. So rechnen wir mit der neuen S-Matrix

Das korrekte Ergebnis erhält man einfach durch Weglassen von w. Auch die Rotationsmatrix wird erweitert und lautet nun so, wie es in Bild 15 gezeigt wird.

Die Vorgehensweise beim

Rechnen erfolgt genauso, wie wir das schon bei der erweiterten Skalierungsmatrix gesehen hatten. Damit sind die Anpassungen erledigt. Sehen wir uns nun die Ursache für diese Veränderungen an: Die Translationsmatrix.

$$R = \begin{pmatrix} \cos(w_2) & \sin(w_2) & 0 \\ -\sin(w_2) & \cos(w_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bild 15. Die neue 3,3-Rotationsmatrix

In Bild 16 finden Sie die allgemeine Form dieser Matrix.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ TX & TY & 1 \end{pmatrix}$$

Bild 16. Die Translationsmatrix T

TX ist die Verschiebung in X, TY die in die Y-Richtung. Die Anwendung auf einen Punkt P1 (X1, Y1) als Operation $P2 = P1 \cdot T$ zeigt Ihnen Bild 17.

$$\begin{array}{l} P1 = (X1 \cdot w \ Y1 \cdot w \ w) \\ P2 = P1 \cdot T \\ T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ TX & TY & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 0 \\ \hline X1 \cdot w & X1 \cdot w & Y1 \cdot w & w \\ Y1 \cdot w & Y1 \cdot w & Y1 \cdot w & w \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P2 = (w \cdot [X1 + TX] \ w) \\ = (X1 + TX \quad Y1 + TY) \end{array}$$

Bild 17. Anwendung der Translationsmatrix auf einen Punkt P1

Die normalen Koordinaten ergeben sich wieder durch einfaches Weglassen von w. Wenn Sie sich das Ergebnis genau ansehen, werden Sie sicher fragen, weshalb das alles auf so komplizierte Weise erfolgen muß. Daß man TX zur X-Koordinate und TY zur Y-Koordinate zu addieren hat, sei vorher auch schon klar gewesen. Damit haben Sie natürlich recht. Jede einzelne dieser Matrizen, S, R oder T für sich allein genommen (R ausgenommen) kann man eigentlich ebenso durch normale Rechenvorgänge ersetzen, die keinerlei Matrizen erfordern. Der Vorteil dieser Art der Transformation zeigt sich erst, wenn man bedenkt, daß sie sehr computergerecht abläuft. Man kann im Prinzip ein- und dasselbe Programm

für alle Operationen verwenden. Lediglich die Elemente der Matrix verändern sich. In noch viel stärkerem Maß aber erfahren wir die Vorteile, wenn mehrere Transformationen zusammenfallen. Auch dann genügt immer noch eine einzige Matrix. Das gleiche Programm kann auch hier verwendet werden. Wieder sind nur die Elemente der Matrix andere. Schließlich sollten Sie noch bedenken, daß wir uns immer noch mit den einfachsten grafischen Objekten (nämlich den Punkten) im einfachsten Koordinatensystem (nämlich dem ebenen kartesischen System) befassen. Wenn wir später in die höheren Dimensionen aufsteigen, werden die Rechnungen ohne Matrizen reichlich verwirrend.

Ein Programm zur Transformation

Bevor wir zu den zusammengesetzten — und damit auch interessanteren — Transformationen kommen, werden wir gemeinsam ein Programm erarbeiten, das drei Matrizen verwendet. Damit Sie möglichst unabhängig von der Art des Computersystems bleiben, verwende ich wieder den schon vorgestellten Grafikstandard. Zur Erinnerung: Wenn Sie das Programm direkt abtippen und starten, dann wird eine Fehlermeldung erzeugt, denn die Befehle zur Grafik müssen erst noch von Ihnen übersetzt werden. Dazu sind

in der untenstehenden Tabelle die Übersetzungen für folgende Systeme angegeben:

- 1) C 64 mit HIRES-3
- 2) C 64 oder C 128 mit Plotter 1520
- 3) C 128 Basic 7.0

Falls Sie ein anderes System verwenden, dann brauchen Sie sich nur die Übersetzungen überlegen und können dann unsere Programme benutzen.

Doch nun soll es losgehen: Wir versetzen uns in die Lage eines Architekten, der die schematische Vorderansicht eines Hauses auf dem Bildschirm zeigen möchte. Bild 18 zeigt Ihnen das Haus und auch gleich ein Weltkoordinatensystem, das es uns gestattet, die fünf Eckpunkte zu bezeichnen.

Die Darstellung des Hauses ist einfach: Wir brauchen nur die fünf Ecken miteinander verbinden (und auch die fünfte Ecke mit der ersten). Problematisch aber wird es, wenn wir an die Umrechnung der Maße denken: Ein Architekt muß den Maßstab

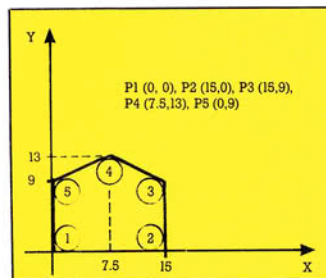


Bild 18. Das darzustellende Haus

```

5 REM ----- TRANS 0 (64HIRES) -
10 DATA 0,0,15,0,15,9,7,5,13,0,9
20 DIM X(6),Y(6)
30 FOR I=1 TO 5:READ X(I),Y(I):NEXT I
40 X(6)=X(1):Y(6)=Y(1)
50 FOR ES:280,0:SYS37498:HFL,6,12
60 REM START
70 FOR I=1 TO 5
80 LINE X(I),Y(I),X(I+1),Y(I+1)
90 NEXT I
100 GETAF:IFA#=""THEN100
110 HOF
READY.

5 REM ----- TRANS 0 (128) -----
10 DATA 0,0,15,0,15,9,7,5,13,0,9
20 DIM X(6),Y(6)
30 FOR I=1 TO 5:READ X(I),Y(I):NEXT I
40 X(6)=X(1):Y(6)=Y(1)
50 COLOR0,16:COLOR1,7:COLOR4,1:GRAPHIC1,1
60 REM START
70 FOR I=1 TO 5
80 DRAW1,X(I),Y(I)TOX(I+1),Y(I+1)
90 NEXT I
100 GETAF:IFA#=""THEN100
110 GRAPHICO
READY.

5 REM ----- TRANS 0 (1520) -----
10 DATA 0,0,15,0,15,9,7,5,13,0,9
20 DIM X(6),Y(6)
30 FOR I=1 TO 5:READ X(I),Y(I):NEXT I
40 X(6)=X(1):Y(6)=Y(1)
50 OPEN1,6,1:OPEN2,6,2:PRINT#2,0:CLOSE2
60 PRINT#1,"M",0,-200:PRINT#1,"I"
70 FOR I=1 TO 5
80 PRINT#1,"R",X(I),Y(I):PRINT#1,
  "J",X(I+1),Y(I+1)
90 NEXT I
100 PRINT#1,"R",0,-200
110 CLOSE1

5 REM ----- TRANS 0 -----
10 DATA 0,0,15,0,15,9,7,5,13,0,9
20 DIM X(6),Y(6)
30 FOR I=1 TO 5:READ X(I),Y(I):NEXT I
40 X(6)=X(1):Y(6)=Y(1)
50 INIT
60 START
70 FOR I=1 TO 5
80 LINE X(I),Y(I),X(I+1),Y(I+1)
90 NEXT I
100 SHOW
110 NORMAL

```

Listing 1

mit angeben, der seiner Zeichnung entspricht. Welches Ausgabegerät er auch verwendet, er muß genau wissen, wievielen Metern in der Natur ein Zentimeter seiner Zeichnung entspricht. Das sollten wir zumindest im Kopf behalten, wenn wir uns die Sache hier stark vereinfachen, indem wir zunächst lediglich Bildpunkt = Meter annehmen. 320 Bildpunkte in X-Richtung entsprechen dann 320 Metern in der Realität. Der Vorteil dieser Annahme ist, daß wir uns damit

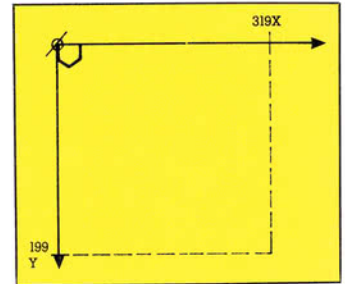


Bild 19. Die Wirkung von TRANS 0 bei Bildschirmausgaben

für den ersten Überblick jegliche Umrechnung ersparen. Das Programm in Listing 1 zeichnet unser Haus.

Wie Sie sicherlich beim Vergleich von TRANS 0 (64HIRES) mit der Übersetzungstabelle bemerkt haben, liegt hier eine Abweichung vor. Das rührt daher, daß die HIRES-Befehle der Tabelle schon mit einem transformierten Koordinatensystem zusammenhängen (ähnliches gilt auch für die C 128-Befehle der Tabelle, die sich immer auf ein Unterprogramm »Transformation« beziehen). Wir wollen aber hier diese Transformationen und ihre Wirkungen untersuchen. Deshalb verwenden wir die Befehle, die sich auf ein nicht transformiertes System beziehen. Was durch TRANS 0 auf dem Bildschirm herauskommt, zeigt Ihnen Bild 19. In der nächsten Folge werden wir noch tiefer in die Transformationen eindringen, und auch Rotationen untersuchen. (H. Ponnath/og)

Befehl	C 64 HIRES-3	Plotter 1520	C 128 Basic 7.0
INIT	POKE53280,0: SYS37498:HFL,6,12	OPEN1,6,1: OPEN2,6,2: PRINT # 2,0:CLOSE2	COLOR0,16:COLOR1,7: COLOR4,1: GRAPHIC1,1
START	TRS,0,320,0,200	PRINT # 1,"M",0, -200: PRINT #,I	YO = 199:XU = 0:XO = 319:YU = 0: Bezogen auf das UP Transformation
MITTE	TRS, -160, 160, -100, 100	PRINT # 1,"R",240,0: PRINT # 1,"I"	XU = -160:XO = 160: YU = -100:YO = 100 Bezogen auf das UP Transformation
PUNKT(X,Y)	TPK,X,Y	PRINT # 1,"R",X,Y: PRINT # 1,"J",X+2,Y+2: PRINT # 1, "R",X,Y	GOSUB1020:DRAW1,XX,YY UP Transformation ab Zeile 1020
LINE(XA,YA,XB,YB)	TLN,XA,YA,XBYB	PRINT # 1,"R",XA,YA: PRINT # 1,"J",XB,YB	X = XA:Y = YA:GOSUB1020: X1 = XX:Y1 = YY:X = XB: Y = YB:GOSUB1020:X2 = XX: Y2 = YY:DRAW1,X1,Y1TOX2,Y2 UP Transformation ab Zeile 1020
KREIS(XM,YM,RX,RX)	TKR,XM,YM,RX,RY, 2*Pi	Programm: M = 50:D = 360*Pi/(M*180):DIMT(M):T(0) = 2*Pi:FOR I = TOM:T(I) = T(I-1)+D:PRINT # 1,"R",RX* COS(T(I-1))+XM,RY*SIN(T(I-1))+YM:PRINT # 1,"J", RX*COS(T(I))+XM,RY*SIN(T(I))+YM:NEXTI	X = XM:Y = YM:GOSUB1020: X5 = XX:Y5 = YY:RX = RX* 319/(XO-XU):RY = RY* 199/(YO-YU):CIRCLE 1,X5,Y5,RX,RY UP Transformation ab Zeile 1020
TEXT(A\$,XT,YT)	TEX,A\$YT,XT	OPEN4,6:PRINT # 1,"R",XT,YT:PRINT #,A\$:CLOSE4: PRINT # 1,"M",240,YT:PRINT # 1,"I"	CHAR1,XT,YT,A\$
SHOW	HAN	PRINT # 1,"R",0,-200	GRAPHIC1
NORMAL	HOF	CLOSE1	GRAPHICO
GRESET	LOE:AUS	OPEN7,6,7:PRINT # 7:CLOSE7	SCNCLR(1)